Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Ceros de una función - Soluciones de ecuaciones

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Fundamentos teóricos. El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

El teorema de Bolzano nos dice que entre cada dos puntos en los que se produce un cambio de signo de una función continua en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de dicha función.

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k = 1, 2, ..., n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Del teorema de Rolle deducimos también que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos, donde $k = 0, 1, 2, ...$, la función tiene ***como máximo*** $k+1$ ceros. Este resultado podemos aplicarlo *hacia atrás*, es decir, si sabemos, por ejemplo, que la derivada tercera se anula solamente en un punto, deducimos que la derivada segunda puede anularse como máximo en dos puntos, que la derivada primera puede anularse como máximo en tres puntos y que la función puede anularse como máximo en cuatro puntos.

Ceros de las funciones polinómicas. Se dice que **una función polinómica $P(x)$ tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a. Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas *contando cada raíz tantas veces como indica su orden*. Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$, se deduce que:

a) Una función polinómica de grado impar tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número impar de raíces reales y sabemos que por lo menos tiene una.

b) Una función polinómica de grado par tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número par de raíces reales y puede ocurrir que no tenga ninguna.

1. Calcula el número de soluciones de la ecuación $4x - 15\log x = 0$.

2. Estudia el número de soluciones de la ecuación:
$$\cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3} = 0.$$

3. Justifica que la ecuación
$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$
tiene exactamente cuatro soluciones reales.

4. Prueba que la ecuación

$$x\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} = 0$$

tiene exactamente tres soluciones reales.

5. Estudia el número de ceros reales de la función $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.

6. Prueba que la función $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$ tiene exactamente tres ceros.

7. Justifica que la ecuación $x^2 = x\operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

8. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

9. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

10. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$ según el valor de m.

11. Prueba por medio del teorema de Rolle que la ecuación $5x^4 - 4x + 1 = 0$ tiene alguna solución en $[0, 1]$.

12. Prueba que entre cada dos soluciones reales de la ecuación $\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x = 1$ hay al menos una solución real de la ecuación $\mathrm{e}^x \cos x = -1$.

13. Determina para qué valores de α la función polinómica $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$ tiene cuatro raíces reales distintas.